JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 9, 192–203 (1973)

Čebyšev-Systeme und Lipschitzklassen

G. MÜHLBACH

Mathematisches Institut der Technischen Universität, 3000 Hannover, West Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received September 23, 1971

1. EINLEITUNG

1966 haben S. J. Karlin und W. J. Studden in ihrer Monographie [3] die vollständigen Čebyšev-Systeme differenzierbarer Funktionen charakterisiert, bei denen mehrfache Knoten zulässig sind (extended complete Čebyšev-systems). Als eine Kennzeichnung solcher Systeme erhält man, daß sich ihre Funktionen durch wiederholte Integration streng positiver Funktionen erzeugen lassen. In dieser Note wird ein analoger Konstruktionsprozeß unter Verwendung von Stieltjes-Integralen bzgl. streng monotoner Funktionen betrachtet, der vollständige Čebyšev-Systeme liefert, die einerseits recht allgemein sind, die zum anderen aber noch durch Differenzierbarkeitseigenschaften ihrer Funktionen beschrieben werden können. Das letztere trifft dann insbesondere auch auf die Funktionen der zugehörigen Lipschitzklassen zu, für die auf elementarem Wege mehrere äquivalente Kennzeichnungen gegeben werden.

2. KONSTRUKTION VOLLSTÄNDIGER ČEBYŠEV-SYSTEME

Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall. $f_0, \ldots, f_m$ seien auf I definierte, stetige reellwertige Funktionen. Diese Funktionen bilden auf I ein Čebyšev-System, wenn für alle Knoten $x_i \in [a, b]$, $x_0 < x_1 < \cdots < x_m$,

$$V\binom{f_0, \ldots, f_m}{x_0, \ldots, x_m} := \det f_j(x_i) = \begin{vmatrix} f_0(x_0) & \cdots & f_0(x_m) \\ \vdots & & \\ f_m(x_0) & \cdots & f_m(x_m) \end{vmatrix} > 0$$

ist. Das Funktionen-System $(f_0, \ldots, f_m)$, $f_i \in C[I]$, wird ein vollständiges Čebyšev-System auf I genannt,[1] wenn $(f_0, \ldots, f_k)$ für jedes $k = 0, \ldots, m$ ein Čebyšev-System ist. Ausgehend von $m + 1$ auf $[a, b]$ streng positiven,

[1] [3, p. 1]: complete Čebyšev system.

stetigen Funktionen $w_0, \ldots, w_m$ und von m auf $[a, b]$ stetigen, streng monoton wachsenden Funktionen $v_1, \ldots, v_m$ definieren wir durch wiederholte Integration für $k = 0, \ldots, m$

$$\begin{aligned} v_{k,k+1} &:= w_k \\ v_{k,i}(x) &:= w_{i-1}(x) \cdot \int_c^x v_{k,i+1}(t)\, dv_i(t), \qquad c \in [a, b]; \quad i = k, k-1, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Diese Funktionen lassen sich übersichtlich in einem dreieckigen Schema anordnen:

$$\begin{array}{cccccc} w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & \cdots & w_m \\ & \big\uparrow {\scriptstyle d_1} & \big\uparrow {\scriptstyle d_2} & \big\uparrow {\scriptstyle d_3} & & \big\uparrow {\scriptstyle d_m} \\ & v_{11} & v_{22} & v_{33} & \cdots & v_{mm} \\ & & \big\uparrow {\scriptstyle d_1} & \big\uparrow {\scriptstyle d_2} & & \vdots \\ & & v_{21} & v_{32} & & \vdots \\ & & & \big\uparrow {\scriptstyle d_1} & & \vdots \\ & & & v_{31} & & \vdots \\ & & & & \ddots & \big\uparrow {\scriptstyle d_1} \\ & & & & & v_{m1} \end{array} \tag{2}$$

Wir bezeichnen die Elemente der "Hypotenuse" mit

$$u_i = v_{i,1} \qquad (i = 0, \ldots, m) \tag{3}$$

und die Elemente ihrer ersten Parallelen mit

$$\tilde{u}_i = v_{i+1,2} \qquad (i = 0, \ldots, m-1) \tag{4}$$

und nennen das System (4) das reduzierte System erster Ordnung von (3). Entspechend bilden die Elemente der $k$ten Parallelen zur Hypotenuse das reduzierte System $k$ter Ordnung des Systems (3).

In expliziter Form sind die Funktionen des Systems (3) wie folgt darstellbar:

$$\begin{aligned} u_0(x) &= w_0(x) \\ u_1(x) &= w_0(x) \int_c^x w_1(t_1)\, dv_1(t_1) \\ u_2(x) &= w_0(x) \int_c^x w_1(t_1) \int_c^{t_1} w_2(t_2)\, dv_2(t_2)\, dv_1(t_1) \\ u_m(x) &= w_0(x) \int_c^x w_1(t_1) \int_c^{t_2} w_2(t_2) \int_c^{t_i} \cdots \int_c^{t_{m-1}} w_m(t_m)\, dv_m(t_m) \cdots dv_1(t_1). \end{aligned} \tag{5}$$

In Umkehrung der Integrationen lassen sich die Funktionen des Schemas (5) mit den Differentialoperatoren

$$D_i f(x) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{v_i(x+h) - v_i(x)}$$

$$d_i f = D_i \left(\frac{f}{w_{i-1}}\right) \qquad (i = 1,\ldots, m)$$

$$d^i = d_i d_{i-1} \cdots d_1$$

(d^0 bezeichne stets die Identität) wie folgt beschreiben: Die Funktionen

$$\tilde{u}_i = d_1 u_{i+1} \qquad (i = 0,\ldots, m-1)$$

bilden das reduzierte System erster Ordnung (4) von (3) und die Funktionen

$$u_i^{(k)} = d^k u_{i+k} = v_{i+k,k+1} \qquad (i = 0,\ldots, m-k)$$

das reduzierte System $k$ter Ordnung. Der Übergang von $u_{i+1}^{(k-1)}$ zu $u_i^{(k)}$ (durch Anwendung des Operators d_k) ist im Dreiecksschema (2) durch Pfeile angedeutet.

Satz 1. *Das System* $(u_0,\ldots, u_m)$ *ist ein vollständiges Čebyšev-System. Insbesondere bilden für jedes* $k = 1,\ldots, m$ *die Funktionen* $u_0,\ldots, u_{k-1}$ *ein linear unabhängiges System von Lösungen der homogenen Gleichung*

$$d^k f = 0.$$

Für $k = 1,\ldots, m$ *löst* u_k *die Anfangswertaufgabe*

$$d^k f = w_k\,; \qquad d^j f(c) = 0 \qquad (j = 0,\ldots, k-1).$$

Zu beweisen ist nur die erste Aussage. Dazu benutzen wir die folgende Formel

$$V\begin{pmatrix} u_0,\ldots, u_m \\ x_0,\ldots, x_m \end{pmatrix} = \left(\prod_{i=0}^{m} w_0(x_i)\right) \cdot \int_{x_0}^{x_1} \int_{x_1}^{x_2} \cdots \int_{x_{m-1}}^{x_m} V\begin{pmatrix} \tilde{u}_0,\ldots, \tilde{u}_{m-1} \\ t_1,\ldots, t_m \end{pmatrix} dv_1(t_m) \cdots dv_1(t_1). \qquad (7)$$

Der Beweis dieser Formel ist einfach (vgl. [3, S. 383], [9, S. 41]) und soll hier deshlab übergangen werden. Für $m = 1$ ist Satz 1 trivial. Sei nun $m \geqslant 1$ und der Satz für alle Systeme der betrachteten Art bewiesen, die höchstens m Funktionen umfassen. Dann folgt aus der Formel (7), daß

$(u_0, \ldots, u_m)$ ein vollständiges Čebyšev-System ist, weil das reduzierte System erster Ordnung $(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{m-1})$ nach Induktionsvoraussetzung ein solches System ist.

3. Konvexe Funktionen und Lipschitzklassen

In der elementaren Analysis wird eine Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ (von unten) konvex genannt, wenn ihre gewöhnlichen dividierten Differenzen zweiter Ordnung (mit drei paarweise verschiedenen Knoten) $[x_0, x_1, x_2 \mid f]$ nicht-negativ sind. Man sagt eine Funktion genügt auf I einer Lipschitzbedingung mit der Konstanten M und dem Exponenten 1, wenn ihre dividierten Differenzen erster Ordnung (die Differenzenquotienten) auf I durch M beschränkt sind. Ausgehend von allgemeineren dividierten Differenzen kann man diese Begriffe in naheliegender Weise verallgemeinern.

Definition 1.[2] $(f_0, f_1, \ldots, f_m)$ sei ein Čebyšev-System auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Die Punkte $x_i \in I$ $(i = 0, \ldots, m)$ seien paarweise verschieden. Für eine auf I definierte Funktion f heißt

$$\left[\begin{matrix} f_0, \ldots, f_m \\ x_0, \ldots, x_m \end{matrix} \middle| f\right] := \frac{V\begin{pmatrix} f_0, \ldots, f_{m-1}, f \\ x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} f_0, \ldots, f_{m-1}, f_m \\ x_0, \ldots, x_{m-1}, x_m \end{pmatrix}}$$

dividierte Differenz (m-ter Ordnung) mit den Knoten x_i bzgl. des Čebyšev-Systems $(f_0, \ldots, f_m)$.

Im Falle $f_i(x) = x^i$ $(i = 0, \ldots, m)$ erhält man die gewöhnlichen dividierten Differenzen $m$ter Ordnung.

Definition 2.[3] $(f_0, f_1, \ldots, f_m)$ sei ein vollständiges Čebyšev-System auf einem Intervall I. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt auf I bzgl. dieses Systems konvex, wenn für alle paarweise verschiedenen Knoten $x_i \in I$

$$\left[\begin{matrix} f_0, \ldots, f_m \\ x_0, \ldots, x_m \end{matrix} \middle| f\right] \geqslant 0$$

ist. f heißt streng konvex, wenn hier die Gleichheit ausgeschlossen ist. f heißt auf I konkav bzw. streng konkav bzgl. $(f_0, \ldots, f_m)$, wenn $-f$ dort konvex bzw. streng konvex ist bzgl. dieses Systems.

[2] [10, S. 104].

[3] Man beachte die kleine Abweichung der hier gegebenen Definition der Konvexität von den Definitionen [10, S. 104] und [3, S. 375].

Definition 3.[4] I sei ein Intervall und $(f_0, f_1, \dots, f_m)$ sei ein Čebyšev-System auf I. Eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ genügt auf I einer Lipschitzbedingung bzgl. $(f_0, \dots, f_m)$ mit der Konstanten M, wenn für alle paarweise verschiedenen Knoten $x_i \in I$

$$\left| \begin{bmatrix} f_0, \dots, f_m \\ x_0, \dots, x_m \end{bmatrix} f \right| \leqslant M$$

ist. Wir benutzen dafür die Bezeichnung

$$f \in \mathrm{Lip}_M(f_0, \dots, f_m)$$

und nennen diese Menge die Lipschitzklasse in bezug auf $(f_0, \dots, f_m)$ zur Konstanten M und

$$\mathrm{Lip}(f_0, \dots, f_m) = \bigcup_{M>0} \mathrm{Lip}_M(f_0, \dots, f_m)$$

die Lipschitzklasse bzgl. $(f_0, \dots, f_m)$ schlechthin.

Offenbar ist zu $f \in \mathrm{Lip}_M(f_0, \dots, f_m)$ auf I die Bedingung äquivalent, daß $Mf_m + f$ und $Mf_m - f$ auf I bzgl. $(f_0, \dots, f_m)$ konvexe Funktionen sind. Dieser Zusammenhang und die in [7] bewiesene Rekursionsformel

$$\begin{bmatrix} f_0, \dots, f_m \\ x_0, \dots, x_m \end{bmatrix} f = \frac{\begin{bmatrix} f_0, \dots, f_{m-1} \\ x_1, \dots, x_m \end{bmatrix} f - \begin{bmatrix} f_0, \dots, f_{m-1} \\ x_0, \dots, x_{m-1} \end{bmatrix} f}{\begin{bmatrix} f_0, \dots, f_{m-1} \\ x_1, \dots, x_m \end{bmatrix} f_m - \begin{bmatrix} f_0, \dots, f_{m-1} \\ x_0, \dots, x_{m-1} \end{bmatrix} f_m} \tag{8}$$

für die dividierten Differenzen werden beim Beweis des folgenden Satzes mehrfach benutzt.

Satz 2. *Es sei $m \geqslant 2$ und $(u_0, \dots, u_m)$ auf $[a, b]$ ein vollständiges Čebyšev-System der Form* (3). *$(u_{0,k}, \dots, u_{m-k,k})$ bezeichne hier das reduzierte System kter Ordnung.*[5] *Die folgenden Aussagen sind paarweise äquivalent* $(k = 0, \dots, m-1)$:[6]

$$d^k f \in \mathrm{Lip}_M(u_{0,k}, \dots, u_{m-k,k}) \qquad \textit{auf} \quad [a, b]. \tag{A_k}$$

Diesem Satz kann man noch ein Korollar hinzufügen:

[4] In [4] betrachten Lorentz und Schumaker Lipschitzklassen differenzierbarer Funktionen in bezug auf sog. erweiterte vollständige Čebyšev-Systeme [3, p. 375]. Demgegenüber wird hier der Begriff einer Lipschitzklasse bzgl. eines Funktionensystems allgemeiner gefaßt.

[5] $u_{i,0} = u_i$, $u_{i,1} = \tilde{u}_i = d^1 u_{i+1}, \dots, u_{i,k} = u_i^{(k)} = d^k u_{i+k}$.

[6] d^0 bezeichne die Identität.

KOROLLAR. *Wenn v_m absolut stetig ist in $[a, b]$, ist jede dieser Aussagen gleichwertig mit*

$$\frac{d^{m-1}f}{w_{m-1}} \text{ ist absolut stetig in } [a, b] \text{ und } |d^m f(x)| \leqslant M w_m(x) \text{ fast überall in } [a, b]. \tag{A_m}$$

Ein Spezialfall dieses Satzes wurde 1970 von G. G. Lorentz und L. L. Schumaker [4] bewiesen. Sie benutzten tiefliegende Differenzierbarkeitseigenschaften der bzgl. eines "vollständigen erweiterten Čebyšev-Systems" konvexen Funktionen, wie sie von Karlin und Studden in ihrer Monographie [3; p. 375, p. 381, und chapt. XI, sect. 11, p. 454 ff] bewiesen wurden. Nach eigener Feststellung dieser Autoren sind die Beweise kaum elementar zu nennen ([3, p. 381] "the detailed presentation of their proofs is rather elaborate"). Im Gegensatz dazu benutzt der hier gegebene Beweis nur elementare Methoden.

Wir benötigen das folgende Lemma, das auch für sich von Interesse ist.

LEMMA 1. *Wenn $d_1 f$ in $[a, b]$ existiert, ist f auf $[a, b]$ bzgl. $(u_0, ..., u_m)$ dann und nur dann konvex, wenn $d_1 f$ bzgl. des reduzierten Systems $(u_{0,1}, ..., u_{m-1,1})$, $u_{i,1} = d_1 u_{i+1}$, konvex ist.*

Lemma 1 läßt sich genauso wie Satz 3 in [7] beweisen, weil auch für die Differentiation nach einer stetigen, streng monoton wachsenden Funktion ein Mittelwertsatz gilt: Wenn $v_1 \in C[a, b]$ streng monoton ist und $D_1 f$ in (a, b) existiert, gibt es eine Zwischenstelle $z \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{v_1(b) - v_1(a)} = D_1 f(z), \qquad a < z < b. \tag{9}$$

Wir beweisen nun Satz 2, und zwar durch vollständige Induktion über m. Für $m = 2$ ist $A_1 \Rightarrow A_0$ leicht einzusehen. Zunächst ist $d^1 f \in \mathrm{Lip}_M(u_{0,1}, u_{1,1})$ äquivalent damit, daß $Mu_{1,1} \pm d^1 f$ bzgl. $(u_{0,1}, u_{1,1})$ konvexe Funktionen sind. Dann folgt nach Lemma 1: $Mu_2 \pm f$ sind konvexe Funktionen bzgl. (u_0, u_1, u_2), und das ist der Aussage A_0 gleichwertig.

Beim Beweis der Implikation $A_0 \Rightarrow A_1$ (im Falle $m = 2$) liegt die Hauptschwierigkeit darin, zu zeigen, daß $d_1 f$ in $[a, b]$ existiert. Wir gehen davon aus, daß es zu jeder auf einem offenen Intervall I bzgl. eines vollständigen Čebyšev-Systems (u_0, u_1, u_2) konvexen Funktion e und zu jedem Punkt $x_1 \in I$ eine "Stützgerade" $g = Au_0 + Bu_1$ gibt, die

$$\begin{aligned} g(x_1) &= e(x_1) && \text{und} \\ g(x) &\leqslant e(x) && \text{für alle} \quad x \in I \end{aligned} \tag{10}$$

erfüllt.

Beweis von (10): Eine Funktion e ist auf I bzgl. des vollständigen Čebyšev-Systems (u_0, u_1, u_2) genau dann konvex, wenn

$$\eta := \left(\frac{e}{u_0}\right) \circ \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^{-1} \quad \text{auf} \quad \frac{u_1}{u_0}(I)$$

im gewöhnlichen Sinne konvex ist. Dabei bezeichnet $(u_1/u_0)^{-1}$ die Umkehrfunktion der streng monoton wachsenden Funktion u_1/u_0 und $\varphi \circ \psi$ die Komposition zweier Funktionen. Es ist nämlich

$$V\begin{pmatrix} u_0 u_1 e \\ x_0 x_1 x_2 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

für alle Tripel $x_0 < x_1 < x_2$ dann und nur dann, wenn

$$V\begin{pmatrix} p_0, p_1, \eta \\ \xi_0, \xi_1, \xi_2 \end{pmatrix} \geqslant 0, \qquad [p_i(x) = x^i]$$

ist für alle Tripel $\xi_0 < \xi_1 < \xi_2$; denn diese Determinanten haben denselben Wert, wenn $\xi_i = (u_1/u_0)(x_i)$ gesetzt wird. Für im gewöhnlichen Sinne konvexe Funktionen ist (10) bekannt und ganz einfach zu beweisen.[7] Wenn e bzgl. (u_0, u_1, u_2) konvex ist, gibt es also zu η und zu jeder Stelle $\xi_1 = (u_1/u_0)(x_1) \in (u_1/u_0)(I)$ eine Stützgerade

$$g^*(\xi) = A + B \cdot \xi.$$

Dann ist $g/u_0 := g^* \circ (u_1/u_0)$, eine "Stützgerade" für e/u_0 und $g = Au_0 + Bu_1$ eine "Stützgerade" für e bei x_1.

Es sei nun e eine auf $[a, b]$ bzgl. (u_0, u_1, u_2) konvexe Funktion aus $\mathrm{Lip}_K(u_0, u_1, u_2)$, $x_1 \in (a, b)$ und $g = Au_0 + Bu_1$ eine "Stützgerade" für e bei x_1. Dann besitzt $h/u_0 := e/u_0 - g/u_0$ an der Stelle x_1 ein absolutes Minimum. Wegen

$$0 \leqslant \left[\begin{matrix} u_0 u_1 u_2 \\ x_0 x_1 x_2 \end{matrix} \middle| h\right] = \left[\begin{matrix} u_0 u_1 u_2 \\ x_0 x_1 x_2 \end{matrix} \middle| e\right] \leqslant K$$

folgt mit der Rekursionsformel (8)

$$0 \leqslant \left[\begin{matrix} u_0 u_1 \\ x_1 x_2 \end{matrix} \middle| h\right] - \left[\begin{matrix} u_0 u_1 \\ x_0 x_1 \end{matrix} \middle| h\right] \leqslant K \cdot \left\{\left[\begin{matrix} u_0 u_1 \\ x_1 x_2 \end{matrix} \middle| u_2\right] - \left[\begin{matrix} u_0 u_1 \\ x_0 x_1 \end{matrix} \middle| u_2\right]\right\},$$

[7] [2, p. 94].

was sich auch in der Form

$$0 \leqslant \frac{\frac{h}{u_0}(x_2) - \frac{h}{u_0}(x_1)}{\frac{u_1}{u_0}(x_2) - \frac{u_1}{u_0}(x_1)} + \frac{\frac{h}{u_0}(x_0) - \frac{h}{u_0}(x_1)}{\frac{u_1}{u_0}(x_1) - \frac{u_1}{u_0}(x_0)}$$

$$\leqslant K \cdot \left\{ \frac{\frac{u_2}{u_0}(x_2) - \frac{u_2}{u_0}(x_1)}{\frac{u_1}{u_0}(x_2) - \frac{u_1}{u_0}(x_1)} - \frac{\frac{u_2}{u_0}(x_1) - \frac{u_2}{u_0}(x_0)}{\frac{u_1}{u_0}(x_1) - \frac{u_1}{u_0}(x_0)} \right\}$$

schreiben läßt. Auf der linken Seite sind beide Summanden positiv. Läßt man $x_0 \to x_1$ und unabhängig $x_2 \to x_1$ ($x_0 < x_1 < x_2$) streben, konvergiert die rechte Seite gegen Null, weil beide Quotienten in der betrachteten Differenz gegen

$$\frac{d_1 u_2(x_1)}{d_1 u_1(x_1)} = \frac{\tilde{u}_1(x_1)}{w_1(x_1)}$$

streben. h/u_0 ist also bei x_1 links- und rechtsseitig differenzierbar bzgl. v_1, wobei beide einseitigen Ableitungen den gemeinsamen Wert Null besitzen. Das bedeutet aber: $d_1 e$ existiert in (a, b), und es gilt $d_1 e(x) = d_1 g(x)$. Auf Grund der Voraussetzungen sind die Funktionen e und $Ku_2 - e$ konvex auf $[a, b]$ bzgl. (u_0, u_1, u_2). Nach Lemma 1 folgt, daß $d_1 e$ und $Ku_{1,1} - d_1 e$ in (a, b) konvex sind bzgl. $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$, was gleichwertig ist mit

$$0 \leqslant \left[\begin{matrix}\tilde{u}_0 \tilde{u}_1 \\ x_0 x_1\end{matrix} \,\middle|\, d_1 e\right] \leqslant K$$

in (a, b). Hieraus ist zu schließen, daß $d_1 e$ auch in den Randpunkten des Intervalls $[a, b]$ existiert (natürlich nur im Sinne einer einseitigen Ableitung von "innen") und die letzte Ungleichung im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ gilt. Nach dem Cauchyschen Kriterium existiert z.B. $\lim_{x \to a, x > a} (d_1 e / w_1)(x)$ und dann auch $\lim_{x \to a, x > a} d_1 e(x)$ im eigentlichen Sinne; nach dem Mittelwertsatz (9) ist

$$d_1 e(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \frac{\frac{e}{w_0}(x) - \frac{e}{w_0}(a)}{v_1(x) - v_1(a)} = \lim_{z \to a} d_1 e(z).$$

Insgesamt haben wir bis jetzt gezeigt: Eine auf $[a, b]$ bzgl. (u_0, u_1, u_2) konvexe Funktion $e \in \mathrm{Lip}_K(u_0, u_1, u_2)$ besitzt in $[a, b]$ eine bzgl. $(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$ konvexe Ableitung $d_1 e \in \mathrm{Lip}_K(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$.

Wenden wir das auf $e = Mu_2 \pm f$ an mit $K = 2M$, so folgt: $d_1 f$ existiert in $[a, b]$, und es gilt $M\tilde{u}_1 \pm d_1 f \in \mathrm{Lip}_{2M}(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$, also $d_1 f \in \mathrm{Lip}_M(\tilde{u}_0, \tilde{u}_1)$. Damit ist Satz 2 im Falle $m = 2$ vollständig bewiesen.

Nehmen wir nun $m \geqslant 2$ und Satz 2 für Čebyšev-Systeme der betrachteten Art, die höchstens m Funktionen umfassen, als bewiesen an. Dann zeigt man genauso wie im Falle $m = 2$ $A_1 \Rightarrow A_0$ und erhält unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung die Implikationskette

$$A_{m-1} \Rightarrow A_{m-2} \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_0 .$$

Um $A_0 \Rightarrow A_1$ zu zeigen, haben wir zunächst wieder die Existenz von $d_1 f$ nachzuweisen. Dazu benötigen wir das folgende Lemma.

LEMMA 2. *Es sei* $(u_0, ..., u_k)$ *ein vollständiges Čebyšev-System der Form* (1) *auf dem kompakten Intervall* $[a, b]$. *Wenn in* (a, b) $\delta^k f(x) := d^k f(x)/w_k(x)$ *existiert, gibt es im Innern des kleinsten, die Knoten* $x_0, ..., x_k$ *enthaltenden Intervalls einen Punkt* z, *so daß*

$$\left[\begin{matrix} u_0, ..., u_k \\ x_0, ..., x_k \end{matrix} \middle| f \right] = \delta^k f(z).$$

Beweis. Die eindeutig bestimmte, f in den Punkten $x_0, ..., x_{k-1}$ interpolierende Linearkombination von $u_0, ..., u_{k-1}$ bezeichnen wir mit φ. Der Fehler $R = f - \varphi$ läßt sich offenbar stets in der Form

$$R(x) = \frac{V\begin{pmatrix} u_0, ..., u_{k-1}, f \\ x_0, ..., x_{k-1}, x \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} u_0, ..., u_{k-1} \\ x_0, ..., x_{k-1} \end{pmatrix}} = \left[\begin{matrix} u_0, ..., u_{k-1}, u_k \\ x_0, ..., x_{k-1}, x \end{matrix} \middle| f \right] \cdot \rho(x) \tag{11}$$

mit

$$\rho(x) := \frac{V\begin{pmatrix} u_0, ..., u_{k-1}, u_k \\ x_0, ..., x_{k-1}, x \end{pmatrix}}{V\begin{pmatrix} u_0, ..., u_{k-1} \\ x_0, ..., x_{k-1} \end{pmatrix}}$$

darstellen, und, wenn $\delta^k f$ in (a, b) existiert, auch in der folgenden, dem Cauchy-Restglied bei der Polynominterpolation entsprechenden Form: Es gibt im Innern der konvexen Hülle von $\{x_0, ..., x_{k-1}, x\}$ einen Punkt z mit

$$R(x) = \rho(x) \cdot \delta^k f(z). \tag{12}$$

Mit dem "erweiterten Mittelwertsatz" [er gilt unter entsprechenden

Voraussetzungen wie der erweiterte Mittelwertsatz der gewöhnlichen Differentialrechnung und läßt sich wie dieser beweisen]

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{D_1 f(z)}{D_1 g(z)}, \qquad a < z < b$$

beweist man zunächst ein Analogon zum "verallgemeinerten Satz von Rolle":[8] Wenn $h \in C[\alpha, \beta]$ $k + 1$ getrennte Nullstellen besitzt und in (α, β) $\delta^k h(x)$ existiert, gibt es ein $z \in (\alpha, \beta)$ mit $\delta^k h(z) = 0$. Mit einem Standardverfahren erhält man damit die Darstellung (12).[9] Da das Interpolationspolynom eindeutig ist, folgt aus (11) und (12) mit $x = x_k$

$$\begin{bmatrix} u_0, \ldots, u_{k-1}, u_k \\ x_0, \ldots, x_{k-1}, x_k \end{bmatrix} f \Bigg] = \delta^k f(z),$$

w.z.b.w.

Nach Lemma 2 sind insbesondere die dividierten Differenzen von u_m bzgl. $(u_0, \ldots, u_{m-1})$ beschränkt.

Sind die dividierten Differenzen einer Funktion g bzgl. eines vollständigen Čebyšev-Systems $(u_0, \ldots, u_m)$ beschränkt und die von u_m bzgl. $(u_0, \ldots, u_{m-1})$, so auch die von g bzgl. $(u_0, \ldots, u_{m-1})$.[10] Danach impliziert $f \in \mathrm{Lip}_M(u_0, \ldots, u_m)$, daß f auch einer Lipschitzklasse $\mathrm{Lip}_K(u_0, u_1, u_2)$ angehört. $A_0 \Rightarrow A_1$ ist nun eine Folgerung aus Lemma 1: Weil $Mu_m \pm f$ in $[a, b]$ konvexe und (im verallgemeinerten Sinne) differenzierbare Funktionen sind, sind $M\tilde{u}_m \pm d_1 f$ konvexe Funktionen bzgl. $(\tilde{u}_0, \ldots, \tilde{u}_{m-1})$, was gleichwertig mit der Aussage A_1 ist. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt nun die umgekehrte Implikationskette

$$A_0 \Rightarrow A_1 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_{m-1}.$$

Beweis des Korollars: A_{m-1} besagt

$$\left| \left[\begin{matrix} u_{0,m-1}, u_{1,m-1} \\ x_0, x_1 \end{matrix} \middle| d^{m-1} f \right] \right| \leqslant M \qquad \text{in} \quad [a, b].$$

Das ist äquivalent mit

$$\left| \frac{d^{m-1}f}{w_{m-1}}(x_1) - \frac{d^{m-1}f}{w_{m-1}}(x_0) \right| \leqslant M \cdot \left| \int_{x_0}^{x_1} w_m(t)\, dv_m(t) \right|.$$

Hieraus folgt offensichtlich (A_m), wenn v_m absolut stetig ist. Ist umgekehrt $d^{m-1}f/w_{m-1}$ absolut stetig und fast überall in $[a, b]$ $|d^m f(x)| \leqslant M w_m(x)$,

[8] [1, p. 9].
[9] [1, p. 56].
[10] Korollar zu Satz 2 in [7].

ergibt sich (A_{m-1}) sofort durch Integration von $d^m f$ bzgl. der absolut stetigen Funktion v_m.

Wir schließen noch eine Folgerung aus Satz 2 an. Auf einem Intervall I wird das vollständige Čebyšev-System der Potenzfunktionen $(p_0, \dots, p_m)$, $p_i(x) = x^i$, zugrunde gelegt. Bekanntlich lassen sich die Differenzen höherer Ordnung einer Funktion f, z.B. rekursiv durch

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x+h) - f(x), \qquad \Delta_h^{m+1} f(x) = \Delta_h^1 \Delta_h^m f(x)$$

definiert, durch die dividierten Differenzen von f bzgl. $(p_0, \dots, p_m)$ mit äquidistanten Knoten darstellen

$$\left[\begin{matrix} p_0, p_1, \dots, p_m \\ x, x+h, \dots, x+mh \end{matrix} \middle| f \right] = \frac{1}{m!} \cdot \frac{1}{h^m} \cdot \Delta_h^m f(x).$$

Unter Benutzung dieser Differenzen erklärt man

$$\omega_m(\delta, f) := \sup_{x,h} | \Delta_h^m f(x) | \qquad (m = 1, 2, \dots),$$

wobei das sup über alle x und h mit $x, x+mh \in I$ und $| h | \leqslant \delta$ zu erstrecken ist, und nennt ω_m den Stetigkeitsmodul $m$ter Ordnung von f auf dem Intervall I, dessen Länge mit l bezeichnet werde [5, S. 47].

SATZ 3.[11] *Die folgenden Aussagen sind äquivalent* $(k = 0, \dots, m-1)$:

$$\omega_{m-k}(\delta, f^{(k)}) \leqslant M \cdot \delta^{m-k} \qquad \textit{für alle } \delta, \qquad 0 \leqslant (m-k) \cdot \delta \leqslant l. \qquad (A_k)$$

Der Beweis basiert auf einem Lemma von T. Popoviciu [10, Theorème 7, insb. S. 112], wonach es zu jeder dividierten Differenz (bzgl. irgendeines Čebyšev-Systems) $[x_0, \dots, x_m \mid f]$ im Innern des kleinsten, die Knoten x_i $(i = 0, \dots, m)$ enthaltenden Intervalls äquidistante Knoten $y, y+h, \dots, y+mh$ gibt, so daß

$$[x_0, \dots, x_m \mid f] = [y, y+h, \dots, y+mh \mid f]$$

gilt. Damit läßt sich Satz 3 sofort aus Satz 2 gewinnen.

LITERATUR

1. PH. J. DAVIS, "Interpolation and Approximation," Blaisdell, New York, 1963.
2. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, AND G. POLYA, "Inequalities," Cambridge University Press, Cambridge, 1964.

[11] Im Falle $m = 2$ ist Satz 3 mit einer anderen Methode auch in [6, S. 281], und (im wesentlichen mit derselben wie hier zum Beweis von Satz 2 verwendeten Methode) auch in [8] bewiesen.

3. S. Karlin and W. Studden, "Tchebycheff Systems," Interscience, New York, 1966.
4. G. G. Lorentz and L. L. Schumaker, Saturation of positive Operators, *J. Approximation Theory* **5** (1972), 413–424.
5. G. G. Lorentz, "Approximation of Functions," Holt, Rinehart and Winston, New York, 1966.
6. G. Mühlbach, Operatoren vom Bernsteinschen Typ, *J. Approximation Theory* **3** (1970), 274–292.
7. G. Mühlbach, A recurrence formula for generalized divided differences and some applications, *J. Approximation Theory*, **9** (1973), 165–172.
8. G. Mühlbach, Approximationstheorie, klassische Fragen und moderne Methoden, *Mathem. Physikalische Semesterberichte* **19** (1972), 89–117.
9. T. Popoviciu, Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réeles, *Mathematica (Cluj)* **8** (1934), 1–85.
10. T. Popoviciu, Sur le reste dans certaines formules linéaires d'approximation de l'analyse, *Mathematica (Cluj)* **1** (1959), 95–142.

Printed in Belgium